Wiederholung Wahrscheinlichkeitstheorie

Algorithmen für verteilte Systeme

Sebastian Forster

Universität Salzburg

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p)

- Höchstens abzählbare **Ergebnismenge** Ω
- **Wahrscheinlichkeitsfunktion** $p : \Omega \to [0, 1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p)

- Höchstens abzählbare **Ergebnismenge** Ω
- **Wahrscheinlichkeitsfunktion** $p : \Omega \to [0, 1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
- **Ereignis**: Teilmenge $A \subseteq \Omega$
  Gegenereignis von A: $\bar{A} := \Omega \setminus A$
- **Wahrscheinlichkeitsverteilung** $\Pr : 2^\Omega \to [0, 1]$ definiert durch $\Pr[A] := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ für alle $A \subseteq \Omega$.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p)

- Höchstens abzählbare **Ergebnismenge** Ω
- **Wahrscheinlichkeitsfunktion** $p : \Omega \to [0,1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
- **Ereignis**: Teilmenge $A \subseteq \Omega$
  Gegenereignis von A: $\bar{A} := \Omega \setminus A$
- **Wahrscheinlichkeitsverteilung** $\Pr : 2^\Omega \to [0,1]$ definiert durch $\Pr[A] := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ für alle $A \subseteq \Omega$.

Beispiel

Würfel: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$

$G = \{2,4,6\}$, $U = \{1,3,5\}$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p)

- Höchstens abzählbare **Ergebnismenge** Ω
- **Wahrscheinlichkeitsfunktion** $p : \Omega \to [0,1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
- **Ereignis**: Teilmenge $A \subseteq \Omega$
  Gegenereignis von A: $\bar{A} := \Omega \setminus A$
- **Wahrscheinlichkeitsverteilung** $\Pr : 2^\Omega \to [0,1]$ definiert durch $\Pr[A] := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ für alle $A \subseteq \Omega$.

Beispiel

Würfel: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$

$G = \{2,4,6\}$, $U = \{1,3,5\}$

$\Pr[G] = p(2) + p(4) + p(6) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p)

- Höchstens abzählbare **Ergebnismenge** Ω
- **Wahrscheinlichkeitsfunktion** $p : \Omega \to [0, 1]$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$
- **Ereignis**: Teilmenge $A \subseteq \Omega$
  Gegenereignis von A: $\bar{A} := \Omega \setminus A$
- **Wahrscheinlichkeitsverteilung** $\Pr : 2^{\Omega} \to [0, 1]$ definiert durch $\Pr[A] := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ für alle $A \subseteq \Omega$.

Beispiel

Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$

$G = \{2, 4, 6\}$, $U = \{1, 3, 5\}$

$\Pr[G] = p(2) + p(4) + p(6) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\Pr[U] = 1 - \Pr[G] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Boolesche Ungleichung

Lemma (Boolesche Ungleichung bzw. Union Bound)

Seien A und B zwei Ereignisse und $C = A \cup B$ jenes Ereignis das eintritt, wenn Ereignis A eintritt oder wenn Ereignis B eintritt. Dann gilt $\Pr[C] \leq \Pr[A] + \Pr[B]$*. Allgemein gilt für jede endliche, nichtleere Menge* $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ *von Ereignissen:* $\Pr[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$.

Boolesche Ungleichung

Lemma (Boolesche Ungleichung bzw. Union Bound)

Seien A und B zwei Ereignisse und $C = A \cup B$ jenes Ereignis das eintritt, wenn Ereignis A eintritt oder wenn Ereignis B eintritt. Dann gilt $\Pr[C] \leq \Pr[A] + \Pr[B]$. *Allgemein gilt für jede endliche, nichtleere Menge* $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ *von Ereignissen:* $\Pr[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$.

Beispiel

Würfel: $G = \{2, 4, 6\}$, $Q = \{1, 4\}$

Boolesche Ungleichung

Lemma (Boolesche Ungleichung bzw. Union Bound)

Seien A und B zwei Ereignisse und $C = A \cup B$ jenes Ereignis das eintritt, wenn Ereignis A eintritt oder wenn Ereignis B eintritt. Dann gilt $\Pr[C] \leq \Pr[A] + \Pr[B]$. Allgemein gilt für jede endliche, nichtleere Menge $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ von Ereignissen: $\Pr[\bigcup_{i=1}^n A_i] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$.

Beispiel

Würfel: $G = \{2, 4, 6\}$, $Q = \{1, 4\}$

Mit Ungleichung: $\Pr[G \cup Q] \leq \Pr[G] + \Pr[Q] \leq \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

Boolesche Ungleichung

Lemma (Boolesche Ungleichung bzw. Union Bound)

Seien A und B zwei Ereignisse und $C = A \cup B$ jenes Ereignis das eintritt, wenn Ereignis A eintritt oder wenn Ereignis B eintritt. Dann gilt $\Pr[C] \leq \Pr[A] + \Pr[B]$. Allgemein gilt für jede endliche, nichtleere Menge $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ von Ereignissen: $\Pr[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$.

Beispiel

Würfel: $G = \{2, 4, 6\}$, $Q = \{1, 4\}$

Mit Ungleichung: $\Pr[G \cup Q] \leq \Pr[G] + \Pr[Q] \leq \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

Tatsächlich gilt: $G \cup Q = \{1, 2, 4, 6\}$ und deshalb $\Pr[G \cup Q] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Zufallsvariablen und Erwartungswerte

Zufallsvariable X auf diskretem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p):

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Zufallsvariablen und Erwartungswerte

Zufallsvariable X auf diskretem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p):

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$
- „$X = x$“ ist das Ereignis $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$

Zufallsvariablen und Erwartungswerte

Zufallsvariable X auf diskretem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p):

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$
- „$X = x$" ist das Ereignis $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Pr_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ von X gegeben durch $\Pr_X[x] := \Pr[X = x] = \Pr[\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}]$

Zufallsvariablen und Erwartungswerte

Zufallsvariable X auf diskretem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p):

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$
- „$X = x$“ ist das Ereignis $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Pr_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ von X gegeben durch $\Pr_X[x] := \Pr[X = x] = \Pr[\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}]$
- **Erwartungswert**: $\mathrm{Ex}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot p(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot \Pr[X = x]$

Zufallsvariablen und Erwartungswerte

Zufallsvariable X auf diskretem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p):

- $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- „$X = x$“ ist das Ereignis $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Pr_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ von X gegeben durch $\Pr_X[x] := \Pr[X = x] = \Pr[\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}]$
- **Erwartungswert**: $\mathrm{Ex}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot p(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot \Pr[X = x]$

Beispiel

Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$

$$X(\omega) := \omega$$

Zufallsvariablen und Erwartungswerte

Zufallsvariable X auf diskretem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p):

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$
- „$X = x$“ ist das Ereignis $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Pr_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ von X gegeben durch $\Pr_X[x] := \Pr[X = x] = \Pr[\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}]$
- **Erwartungswert**: $\mathrm{Ex}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot p(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot \Pr[X = x]$

Beispiel

Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$

$$X(\omega) := \omega$$

$$\Pr[X = x] = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{falls } x \in \{1, \ldots, 6\} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

Zufallsvariablen und Erwartungswerte

Zufallsvariable X auf diskretem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p):

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$
- „$X = x$“ ist das Ereignis $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$
- Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Pr_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ von X gegeben durch $\Pr_X[x] := \Pr[X = x] = \Pr[\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}]$
- **Erwartungswert**: $\mathrm{Ex}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot p(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot \Pr[X = x]$

Beispiel

Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$

$$X(\omega) := \omega$$

$$\Pr[X = x] = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{falls } x \in \{1, \ldots, 6\} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ex}[X] = 1 \cdot \Pr[X = 1] + \cdots + 6 \cdot \Pr[X = 6] = (1 + \cdots + 6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

Linearität des Erwartungswerts

Theorem (Linearität des Erwartungswerts)

Seien X und Y zwei beliebige Zufallsvariablen und $Z := X + Y$ die Summe dieser Zufallsvariablen. Dann gilt $\mathrm{Ex}[Z] = \mathrm{Ex}[X] + \mathrm{Ex}[Y]$. Allgemein gilt für endlich viele Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ dass $\mathrm{Ex}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ex}[X_i]$.

Linearität des Erwartungswerts

Theorem (Linearität des Erwartungswerts)

Seien X und Y zwei beliebige Zufallsvariablen und $Z := X + Y$ die Summe dieser Zufallsvariablen. Dann gilt $\mathrm{Ex}[Z] = \mathrm{Ex}[X] + \mathrm{Ex}[Y]$. Allgemein gilt für endlich viele Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ dass $\mathrm{Ex}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ex}[X_i]$.

Beispiel

Zwei Würfel:

X: Augenzahl des ersten Würfels
Y: Augenzahl des zweiten Würfels

Linearität des Erwartungswerts

Theorem (Linearität des Erwartungswerts)

Seien X *und* Y *zwei beliebige Zufallsvariablen und* $Z := X + Y$ *die Summe dieser Zufallsvariablen. Dann gilt* $\mathrm{Ex}[Z] = \mathrm{Ex}[X] + \mathrm{Ex}[Y]$. *Allgemein gilt für endlich viele Zufallsvariablen* $X_1, \ldots, X_n$ *dass* $\mathrm{Ex}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ex}[X_i]$.

Beispiel

Zwei Würfel:

X: Augenzahl des ersten Würfels
Y: Augenzahl des zweiten Würfels

$\mathrm{Ex}[X + Y] = \mathrm{Ex}[X] + \mathrm{Ex}[Y] = 3.5 + 3.5 = 7.$

Stochastische Unabhängigkeit

Unabhängigkeit von Ereignissen:

- Zwei Ereignisse: A und B **unabhängig** wenn $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$

Stochastische Unabhängigkeit

Unabhängigkeit von Ereignissen:

- Zwei Ereignisse: A und B **unabhängig** wenn $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$
- Allgemein: $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ **unabhängig**, wenn $\Pr[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} \Pr[A_i]$ für jede nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$

Stochastische Unabhängigkeit

Unabhängigkeit von Ereignissen:

- Zwei Ereignisse: A und B **unabhängig** wenn $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$
- Allgemein: $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ **unabhängig**, wenn $\Pr[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} \Pr[A_i]$ für jede nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$

Beispiel

Würfel: $G = \{2, 4, 6\}$, $Q = \{1, 4\}$

Stochastische Unabhängigkeit

Unabhängigkeit von Ereignissen:

- Zwei Ereignisse: A und B **unabhängig** wenn $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$
- Allgemein: $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ **unabhängig**, wenn $\Pr[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} \Pr[A_i]$ für jede nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$

Beispiel

Würfel: $G = \{2, 4, 6\}$, $Q = \{1, 4\}$

$\Pr[G] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ und $\Pr[Q] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und damit $\Pr[G] \cdot \Pr[Q] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Stochastische Unabhängigkeit

Unabhängigkeit von Ereignissen:

- Zwei Ereignisse: A und B **unabhängig** wenn $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$
- Allgemein: $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ **unabhängig**, wenn $\Pr[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} \Pr[A_i]$ für jede nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$

Beispiel

Würfel: $G = \{2, 4, 6\}$, $Q = \{1, 4\}$

$\Pr[G] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ und $\Pr[Q] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und damit $\Pr[G] \cdot \Pr[Q] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Wegen $G \cap Q = \{4\}$: $\Pr[G \cap Q] = \frac{1}{6} = \Pr[G] \cdot \Pr[Q]$

Stochastische Unabhängigkeit

Unabhängigkeit von Ereignissen:

- Zwei Ereignisse: A und B **unabhängig** wenn $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$
- Allgemein: $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ **unabhängig**, wenn $\Pr[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} \Pr[A_i]$ für jede nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$

Beispiel

Würfel: $G = \{2, 4, 6\}$, $Q = \{1, 4\}$

$\Pr[G] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ und $\Pr[Q] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und damit $\Pr[G] \cdot \Pr[Q] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Wegen $G \cap Q = \{4\}$: $\Pr[G \cap Q] = \frac{1}{6} = \Pr[G] \cdot \Pr[Q]$

Somit: G und Q unabhängig.

Stochastische Unabhängigkeit

Unabhängigkeit von Ereignissen:

- Zwei Ereignisse: A und B **unabhängig** wenn $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$
- Allgemein: $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ **unabhängig**, wenn $\Pr[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} \Pr[A_i]$ für jede nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$

Beispiel

Würfel: $G = \{2, 4, 6\}$, $Q = \{1, 4\}$

$\Pr[G] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ und $\Pr[Q] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und damit $\Pr[G] \cdot \Pr[Q] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Wegen $G \cap Q = \{4\}$: $\Pr[G \cap Q] = \frac{1}{6} = \Pr[G] \cdot \Pr[Q]$

Somit: G und Q unabhängig.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen:

- Zwei Zufallsvariablen: X und Y **unabhängig** wenn $X = x$ und $Y = y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ unabhängig

Stochastische Unabhängigkeit

Unabhängigkeit von Ereignissen:

- Zwei Ereignisse: A und B **unabhängig** wenn $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$
- Allgemein: $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ **unabhängig**, wenn $\Pr[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} \Pr[A_i]$ für jede nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$

Beispiel

Würfel: $G = \{2, 4, 6\}$, $Q = \{1, 4\}$

$\Pr[G] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ und $\Pr[Q] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ und damit $\Pr[G] \cdot \Pr[Q] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Wegen $G \cap Q = \{4\}$: $\Pr[G \cap Q] = \frac{1}{6} = \Pr[G] \cdot \Pr[Q]$

Somit: G und Q unabhängig.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen:

- Zwei Zufallsvariablen: X und Y **unabhängig** wenn $X = x$ und $Y = y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ unabhängig
- Allgemein: $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ **unabhängig** wenn $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ unabhängig

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B:

$$\Pr[A \mid B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

(falls $\Pr[B] > 0$)

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B:

$$\Pr[A \mid B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

(falls $\Pr[B] > 0$)

A und B mit $\Pr[B] > 0$ sind genau dann unabhängig, wenn $\Pr[A \mid B] = A$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B:

$$\Pr[A \mid B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

(falls $\Pr[B] > 0$)

A und B mit $\Pr[B] > 0$ sind genau dann unabhängig, wenn $\Pr[A \mid B] = A$

Beispiel

Würfel: $G = \{2, 4, 6\}$, $Q = \{1, 4\}$, $P = \{2, 3, 5\}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B:

$$\Pr[A \mid B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

(falls $\Pr[B] > 0$)

A und B mit $\Pr[B] > 0$ sind genau dann unabhängig, wenn $\Pr[A \mid B] = A$

Beispiel

Würfel: $G = \{2, 4, 6\}$, $Q = \{1, 4\}$, $P = \{2, 3, 5\}$

$\Pr[Q \mid G] = \frac{\Pr[Q \cap G]}{\Pr[G]} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} = \Pr[Q]$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B:

$$\Pr[A \mid B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

(falls $\Pr[B] > 0$)

A und B mit $\Pr[B] > 0$ sind genau dann unabhängig, wenn $\Pr[A \mid B] = A$

Beispiel

Würfel: $G = \{2, 4, 6\}$, $Q = \{1, 4\}$, $P = \{2, 3, 5\}$

$$\Pr[Q \mid G] = \frac{\Pr[Q \cap G]}{\Pr[G]} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} = \Pr[Q]$$

$$\Pr[P \mid G] = \frac{\Pr[P \cap G]}{\Pr[G]} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = \Pr[P]$$

Uniforme Verteilung

Eine Zufallsvariable X heißt uniform verteilt (bzw. gleichverteilt) mit den Parametern $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$, wobei $a \leq b$, ($X \sim U(a, b)$) falls

$$\Pr[X = k] = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } k \in \{a, a+1, \ldots, b\} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

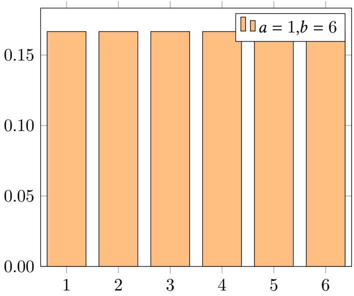
mit $n := b - a + 1$ gilt.

Uniforme Verteilung

Eine Zufallsvariable X heißt uniform verteilt (bzw. gleichverteilt) mit den Parametern $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$, wobei $a \leq b$, ($X \sim U(a, b)$) falls

$$\Pr[X = k] = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } k \in \{a, a+1, \ldots, b\} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

mit $n := b - a + 1$ gilt.



Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable X heißt Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in [0, 1]$ falls

$$\Pr[X = k] = \begin{cases} p & \text{falls } k = 1 \\ 1 - p & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

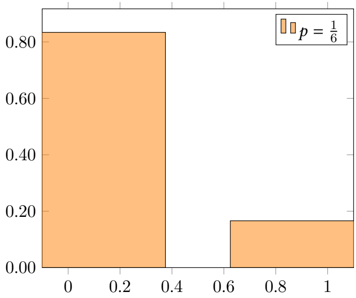
gilt. Dabei wird üblicherweise p als die Erfolgswahrscheinlichkeit bezeichnet.

Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable X heißt Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in [0, 1]$ falls

$$\Pr[X = k] = \begin{cases} p & \text{falls } k = 1 \\ 1 - p & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

gilt. Dabei wird üblicherweise p als die Erfolgswahrscheinlichkeit bezeichnet.



Binomialverteilung

Sei $\{X_1, \ldots, X_n\}$ eine endliche Menge unabhängiger Zufallsvariablen, die jeweils Bernoulli-verteilt mit Parameter p sind, und sei $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann heißt X heißt binomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ ($X \sim B(n, p)$) und es gilt

$$\Pr[X = k] = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{falls } k \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} .$$

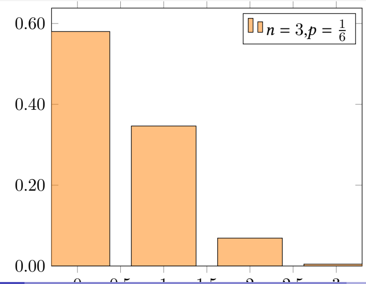
Dabei wird üblicherweise n als die Anzahl an Versuchen und p als die Erfolgswahrscheinlichkeit bezeichnet.

Binomialverteilung

Sei $\{X_1, \ldots, X_n\}$ eine endliche Menge unabhängiger Zufallsvariablen, die jeweils Bernoulli-verteilt mit Parameter p sind, und sei $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann heißt X heißt binomialverteilt mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ ($X \sim B(n, p)$) und es gilt

$$\Pr[X = k] = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{falls } k \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} .$$

Dabei wird üblicherweise n als die Anzahl an Versuchen und p als die Erfolgswahrscheinlichkeit bezeichnet.



Geometrische Verteilung

Sei $\{X_1, X_2, \ldots\}$ eine abzählbar unendliche Menge unabhängiger Zufallsvariablen, die jeweils Bernoulli-verteilt mit Parameter p sind, und sei $X = \min\{i \geq 1 \mid X_i = 1\}$. Dann heißt X heißt geometrisch verteilt mit Parameter $p \in [0,1]$ ($X \sim G(p)$) und es gilt.

$$\Pr[X = k] = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \text{falls } k \in \{1, 2, \ldots\} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} .$$

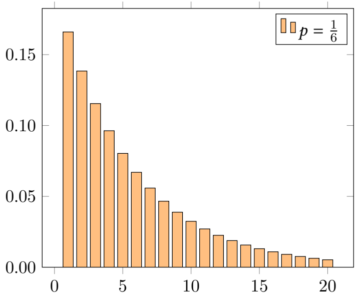
Dabei wird üblicherweise p als die Erfolgswahrscheinlichkeit bezeichnet.

Geometrische Verteilung

Sei $\{X_1, X_2, \ldots\}$ eine abzählbar unendliche Menge unabhängiger Zufallsvariablen, die jeweils Bernoulli-verteilt mit Parameter p sind, und sei $X = \min\{i \geq 1 \mid X_i = 1\}$. Dann heißt X heißt geometrisch verteilt mit Parameter $p \in [0, 1]$ ($X \sim G(p)$) und es gilt.

$$\Pr[X = k] = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \text{falls } k \in \{1, 2, \ldots\} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} .$$

Dabei wird üblicherweise p als die Erfolgswahrscheinlichkeit bezeichnet.



Erwartungswert der geometrischen Verteilung

Theorem

Sei X geometrisch verteilt mit Parameter p. Dann gilt $\mathrm{Ex}[X] = \frac{1}{p}$.

Erwartungswert der geometrischen Verteilung

Theorem

Sei X geometrisch verteilt mit Parameter p. Dann gilt $\mathrm{Ex}[X] = \frac{1}{p}$.

Beweis:

- $\Pr[X = k] = (1 - p)^{k-1} p$

Erwartungswert der geometrischen Verteilung

Theorem

Sei X geometrisch verteilt mit Parameter p. Dann gilt $\mathrm{Ex}[X] = \frac{1}{p}$.

Beweis:

- $\Pr[X = k] = (1-p)^{k-1}p$
- Definition des Erwartungswerts:

$$\mathrm{Ex}[X] = \sum_{k \geq 1} k \cdot \Pr[X = k]$$

Erwartungswert der geometrischen Verteilung

Theorem

Sei X geometrisch verteilt mit Parameter p. Dann gilt $\mathrm{Ex}[X] = \frac{1}{p}$.

Beweis:

- $\Pr[X = k] = (1 - p)^{k-1} p$
- Definition des Erwartungswerts:
$$\mathrm{Ex}[X] = \sum_{k \geq 1} k \cdot \Pr[X = k] = \sum_{k \geq 1} k (1 - p)^{k-1} p$$

Erwartungswert der geometrischen Verteilung

Theorem

Sei X geometrisch verteilt mit Parameter p. Dann gilt $\mathrm{Ex}[X] = \frac{1}{p}$.

Beweis:

- $\Pr[X = k] = (1 - p)^{k-1} p$
- Definition des Erwartungswerts:
$$\mathrm{Ex}[X] = \sum_{k \geq 1} k \cdot \Pr[X = k] = \sum_{k \geq 1} k(1 - p)^{k-1} p = \sum_{k \geq 0} (k + 1)(1 - p)^k p$$

Erwartungswert der geometrischen Verteilung

Theorem

Sei X geometrisch verteilt mit Parameter p. Dann gilt $\mathrm{Ex}[X] = \frac{1}{p}$.

Beweis:

- $\Pr[X = k] = (1-p)^{k-1} p$
- Definition des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}[X] &= \sum_{k \geq 1} k \cdot \Pr[X = k] = \sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1} p = \sum_{k \geq 0} (k+1)(1-p)^k p \\ &= \sum_{k \geq 0} k(1-p)^k p + \sum_{k \geq 0} (1-p)^k p\end{aligned}$$

Erwartungswert der geometrischen Verteilung

Theorem

Sei X geometrisch verteilt mit Parameter p. Dann gilt $\mathrm{Ex}[X] = \frac{1}{p}$.

Beweis:

- $\Pr[X = k] = (1-p)^{k-1}p$
- Definition des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}[X] &= \sum_{k\geq 1} k \cdot \Pr[X = k] = \sum_{k\geq 1} k(1-p)^{k-1}p = \sum_{k\geq 0} (k+1)(1-p)^k p \\
&= \sum_{k\geq 0} k(1-p)^k p + \sum_{k\geq 0} (1-p)^k p \\
&= \sum_{k\geq 1} k(1-p)^k p + \sum_{k\geq 1} (1-p)^{k-1} p
\end{aligned}$$

Erwartungswert der geometrischen Verteilung

Theorem

Sei X geometrisch verteilt mit Parameter p. Dann gilt $\mathrm{Ex}[X] = \frac{1}{p}$.

Beweis:

- $\Pr[X = k] = (1-p)^{k-1}p$
- Definition des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ex}[X] &= \sum_{k \geq 1} k \cdot \Pr[X = k] = \sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1}p = \sum_{k \geq 0} (k+1)(1-p)^k p \\
&= \sum_{k \geq 0} k(1-p)^k p + \sum_{k \geq 0} (1-p)^k p \\
&= \sum_{k \geq 1} k(1-p)^k p + \sum_{k \geq 1} (1-p)^{k-1} p \\
&= (1-p) \sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1} p + \sum_{k \geq 1} \Pr[X = k]
\end{aligned}$$

Erwartungswert der geometrischen Verteilung

Theorem

Sei X geometrisch verteilt mit Parameter p. Dann gilt $\operatorname{Ex}[X] = \frac{1}{p}$.

Beweis:

- $\Pr[X = k] = (1-p)^{k-1}p$
- Definition des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ex}[X] &= \sum_{k \geq 1} k \cdot \Pr[X = k] = \sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1}p = \sum_{k \geq 0} (k+1)(1-p)^k p \\
&= \sum_{k \geq 0} k(1-p)^k p + \sum_{k \geq 0} (1-p)^k p \\
&= \sum_{k \geq 1} k(1-p)^k p + \sum_{k \geq 1} (1-p)^{k-1} p \\
&= (1-p) \sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1} p + \sum_{k \geq 1} \Pr[X = k]
\end{aligned}$$

- **Somit:** $\operatorname{Ex}[X] = (1-p)\operatorname{Ex}[X] + 1$

Erwartungswert der geometrischen Verteilung

Theorem

Sei X geometrisch verteilt mit Parameter p. Dann gilt $\mathrm{Ex}[X] = \frac{1}{p}$.

Beweis:

- $\Pr[X = k] = (1-p)^{k-1}p$
- Definition des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}[X] &= \sum_{k\geq 1} k \cdot \Pr[X = k] = \sum_{k\geq 1} k(1-p)^{k-1}p = \sum_{k\geq 0}(k+1)(1-p)^k p \\ &= \sum_{k\geq 0} k(1-p)^k p + \sum_{k\geq 0}(1-p)^k p \\ &= \sum_{k\geq 1} k(1-p)^k p + \sum_{k\geq 1}(1-p)^{k-1} p \\ &= (1-p)\sum_{k\geq 1} k(1-p)^{k-1} p + \sum_{k\geq 1}\Pr[X = k]\end{aligned}$$

- **Somit:** $\mathrm{Ex}[X] = (1-p)\,\mathrm{Ex}[X] + 1$, also $\mathrm{Ex}[X] = \frac{1}{p}$

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung

Theorem (Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung)

Für jede geometrisch verteilte Zufallsvariable X und alle $m, n \geq 0$ gilt

$$\Pr[X > m + n \mid X > m] = \Pr[X > n] .$$

Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung

Theorem (Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung)

Für jede geometrisch verteilte Zufallsvariable X *und alle* $m, n \geq 0$ *gilt*

$$\Pr[X > m + n \mid X > m] = \Pr[X > n] \,.$$

Beispiel

X: Anzahl der Würfe bis zur ersten Sechs

$\Pr[X > 3 \mid X > 2] = \Pr[X > 2 + 1 \mid X > 2] = \Pr[X > 1] = 1 - p.$

Markov-Ungleichung

Theorem (Markov-Ungleichung)

Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable und sei $\alpha > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\Pr[X \geq \alpha \cdot \mathrm{Ex}[X]] \leq \frac{1}{\alpha}\,.$$

Markov-Ungleichung

Theorem (Markov-Ungleichung)

Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable und sei $\alpha > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\Pr[X \geq \alpha \cdot \mathrm{Ex}[X]] \leq \frac{1}{\alpha}\,.$$

Beispiel

X: Augenzahl beim Würfeln

Markov-Ungleichung

Theorem (Markov-Ungleichung)

Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable und sei $\alpha > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\Pr[X \geq \alpha \cdot \mathrm{Ex}[X]] \leq \frac{1}{\alpha}\,.$$

Beispiel

X: Augenzahl beim Würfeln

Wegen $\mathrm{Ex}[X] = 3.5$ liefert Markov-Ungleichung:
$\Pr[X \geq 4] = \Pr[X \geq \frac{8}{7} \cdot \mathrm{Ex}[X]] \leq \frac{7}{8}$.

Markov-Ungleichung

Theorem (Markov-Ungleichung)

Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable und sei $\alpha > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\Pr[X \geq \alpha \cdot \mathrm{Ex}[X]] \leq \frac{1}{\alpha}\,.$$

Beispiel

X: Augenzahl beim Würfeln

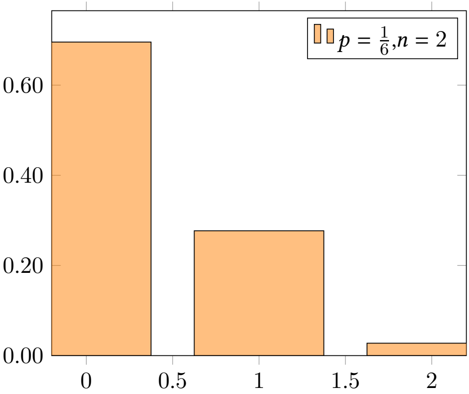
Wegen $\mathrm{Ex}[X] = 3.5$ liefert Markov-Ungleichung:
$\Pr[X \geq 4] = \Pr[X \geq \frac{8}{7} \cdot \mathrm{Ex}[X]] \leq \frac{7}{8}$.

Tatsächlich gilt: $\Pr[X \geq 4] = \frac{1}{2}$.

Konzentration binomialverteilter Zufallsvariablen

$X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist Summe n Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen:

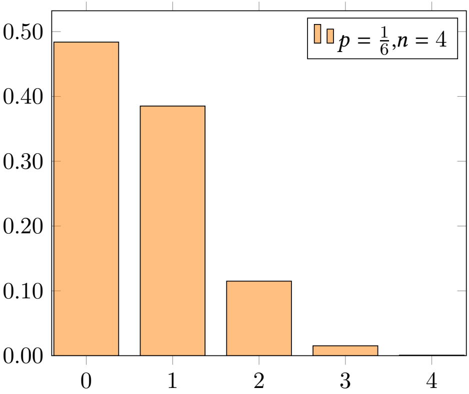
- $\Pr[X_i = 1] = p := \frac{1}{6}$
- $\Pr[X_i = 0] = 1 - p = \frac{5}{6}$



Konzentration binomialverteilter Zufallsvariablen

$X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist Summe n Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen:

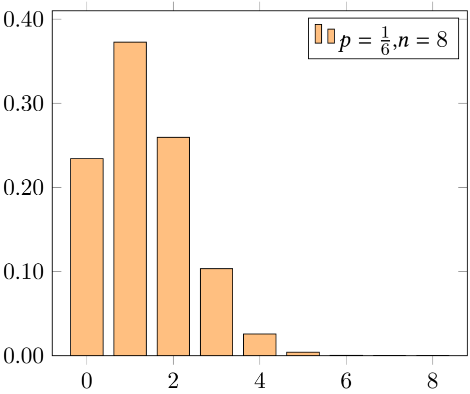
- $\Pr[X_i = 1] = p := \frac{1}{6}$
- $\Pr[X_i = 0] = 1 - p = \frac{5}{6}$



Konzentration binomialverteilter Zufallsvariablen

$X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist Summe n Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen:

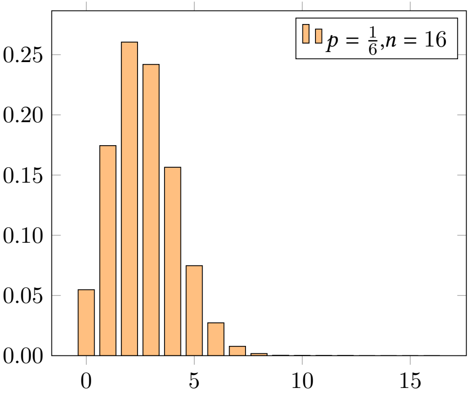
- $\Pr[X_i = 1] = p := \frac{1}{6}$
- $\Pr[X_i = 0] = 1 - p = \frac{5}{6}$



Konzentration binomialverteilter Zufallsvariablen

$X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist Summe n Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen:

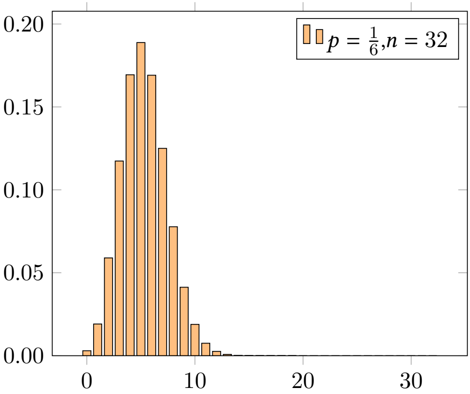
- $\Pr[X_i = 1] = p := \frac{1}{6}$
- $\Pr[X_i = 0] = 1 - p = \frac{5}{6}$



Konzentration binomialverteilter Zufallsvariablen

$X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist Summe n Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen:

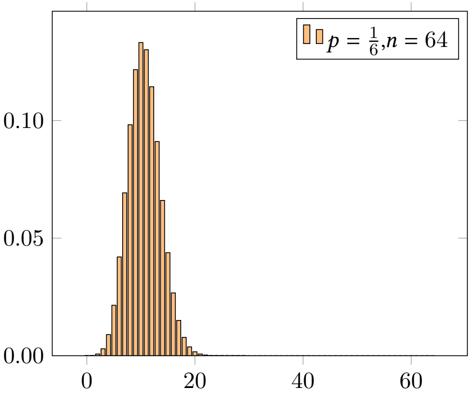
- $\Pr[X_i = 1] = p := \frac{1}{6}$
- $\Pr[X_i = 0] = 1 - p = \frac{5}{6}$



Konzentration binomialverteilter Zufallsvariablen

$X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ ist Summe n Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen:

- $\Pr[X_i = 1] = p := \frac{1}{6}$
- $\Pr[X_i = 0] = 1 - p = \frac{5}{6}$



Chernoff-Schranke

Theorem (Chernoff-Schranke für oberen Rand)

Seien $X_1, \ldots, X_n \in \{0, 1\}$ *unabhängige binäre Zufallsvariablen mit* $\Pr[X_i = 1] \leq p$ *und sei* $\mu := pn$*. Dann gilt Für jedes* $\delta > 0$*:*

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geq (1+\delta) \cdot \mu\right] \leq \frac{1}{e^{\frac{\min\{\delta,\delta^2\}}{3} \cdot \mu}}$$

Chernoff-Schranke

Theorem (Chernoff-Schranke für oberen Rand)

Seien $X_1, \ldots, X_n \in \{0,1\}$ *unabhängige binäre Zufallsvariablen mit* $\Pr[X_i = 1] \leq p$ *und sei* $\mu := pn$*. Dann gilt Für jedes* $\delta > 0$*:*

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geq (1+\delta)\cdot\mu\right] \leq \frac{1}{e^{\frac{\min\{\delta,\delta^2\}}{3}\cdot\mu}}$$

Theorem (Chernoff-Schranke für unteren Rand)

Seien $X_1, \ldots, X_n \in \{0,1\}$ *unabhängige binäre Zufallsvariablen mit* $\Pr[X_i = 1] \geq p$ *und sei* $\mu := pn$*. Dann gilt für jedes* $\delta \in [0,1]$*:*

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq (1-\delta)\cdot\mu\right] \leq \frac{1}{e^{\frac{\delta^2}{2}\cdot\mu}}$$